

4. Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung

Signalwandlung

Analog/Digital-Wandlung:

Analoges (stetiges) Signal $s_a(t)$ \rightarrow Periodische Abtastung \rightarrow Digitales (diskretes) Signal $s_d(t)$

Quantisierung: $s_a(t)$ wird im Raster von Q Quantisierungsstufen jeweils auf die nächsttiefere diskrete Stufe abgerundet (\rightarrow Quantisierungsfehler $s_a(t) - s_d(t)$).

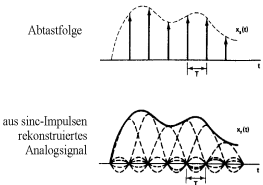
Abtasttheorem: Gemäss Shannon: Die Abtastfrequenz f_a muss mindestens das doppelte der höchsten noch zu erfassenden Frequenz (Nyquist) betragen.



Digital/Analog-Wandlung: Rekonstruktion mit idealem Tiefpassfilter:

Bei der Rekonstruktion des ursprünglichen kontinuierlichen Signals $s_a(t)$ müssen die durch Abtastung entstandenen periodischen Frequenzkomponenten unterdrückt werden:

Idealer Tiefpass: Rekonstruktion von $s_{ra}(t)$ mit der generischen Funktion $sinc(t) = \sin(t)/t$ (Mit realen Tiefpässen sind fehlerfreie Rekonstruktionen nicht möglich)



Fourier-Transformation

Einsatzgebiete der Fourier-Transformation in Bild- und Klangverarbeitung:

Verdichtung, Filterung sowie Charakterisierungen digitaler Bild- und Klangdaten (z. B. zur Mustererkennung)

Fourier-Reihe:

Darstellung beliebiger *periodischer* Funktionen als Überlagerung von trigonometrischen Funktionen. Die Fourier-Reihe besteht aus einer harmonischen Grundschwingung mit Grundfrequenz der Ausgangsfunktion plus die Summe der zugehörigen Oberschwingungen mit Vielfachen derselben Grundfrequenz:

Input-Funktion: $f(x) = f(x + k \cdot T)$ T als Periode; k als ganzzahliger Faktor

Fourierreihe: $f(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot x)]$
 k Frequenzvielfaches der Grundschwingung für jeweilige Teilschwingung
 a_k, b_k Entwicklungskoeffizienten. Bestimmen Amplitude der Teilschwingung
 $a_k = 2/T \int_0^T f(x) \cdot \cos(k \cdot x) dx$
 $b_k = 2/T \int_0^T f(x) \cdot \sin(k \cdot x) dx$ } Für $k = 0, 1, 2, \dots$

Konvergenz: Für $k \rightarrow \infty$ konvergiert die Fourierreihe gegen die gesetzte Input-Funktion

1D-Fourier-Transformation:

Die Verallgemeinerung des Prinzips der Fourier-Reihe auf *nichtperiodische* Funktionen unter Verwendung der komplexen Schreibweise (Eulersche Beziehung: $e^{jx} = \cos(x) + j \cdot \sin(x)$) führt zum Fourier-Integral:

- $G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot (f \cdot t)} dt$ *Frequenzbereich* (Spektrum)
- $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \cdot e^{+j2\pi \cdot (f \cdot t)} df$ *Zeitbereich*

$G(f)$ ist die *Fourier-Transformierte* der zeitabhängigen Funktion $g(t)$. Beide Formen enthalten gleichwertige Information. Für die Betrachtung von statischen Bildern kann die Zeitfunktion durch eine Ortsfunktion ersetzt werden (siehe 2D-FT).

2D-Fourier-Transformation:

Erweiterung des 1D-Fourier-Integrals auf zwei Dimensionen sowie Ersatz der Zeitfunktion durch Ortsfunktion:

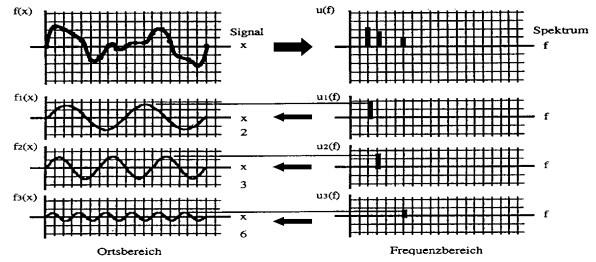
- $F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi(u \cdot x + v \cdot y)} dx dy$ *Frequenzbereich* (Spektrum)
- $f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \cdot e^{+j2\pi(x \cdot u + y \cdot v)} du dv$ *Ortsbereich*

Da der Ortsbereich im Falle von Rasterbildern auf $M \times M$ diskrete Bildpunkte beschränkt ist, können die Integrale mit Summenzeichen substituiert werden (Idee der diskreten Fourier-Transformation):

- $F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi(u \cdot x + v \cdot y)}$ *Frequenzbereich* (Spektrum)
- $f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{M-1} F(u, v) \cdot e^{+j2\pi(x \cdot u + y \cdot v)}$ *Ortsbereich*

Beispiel einer 1D-Fourier-Analyse (Klang):

Die Ausgangsfunktion $f(x)$ wird via Fourier-Analyse aus dem Zeitbereich in den Frequenzbereich transformiert. Dort wird ersichtlich, dass $f(x)$ aus der Überlagerung dreier Schwingungen $f_1(x)$, $f_2(x)$ und $f_3(x)$ mit den jeweiligen Amplituden $u_1(f)$, $u_2(f)$ und $u_3(f)$ gebildet werden kann.

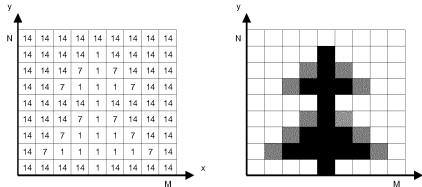


Fast-Fourier-Transformation (FFT):

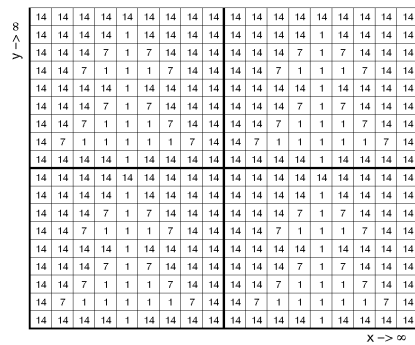
Eine diskrete Fourier-Analyse lässt sich als Gleichungssystem (N Gleichungen mit je N Komponenten; N als Anzahl Spektralkomponenten) darstellen, welches wiederum in Matrix-Form beschrieben werden kann. Diese Matrix lässt sich gemäss Verfahren von Runge in $\log_2(N)$ Matrizen faktorisieren. → Erhebliche Reduktion des Berechnungsaufwands. Die FFT verringert die Anzahl nötiger komplexer Multiplikationen und Additionen von N^2 (DFT) auf $N \cdot \log_2 N$ (FFT).

Fourier-Transformation von Bildern:

1. – Abbild und Bild im Ortsbereich (x,y):



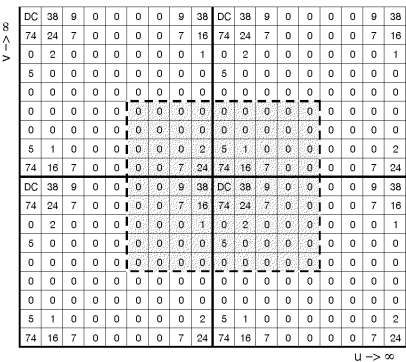
2. – Periodisierung des Abbildmusters:



3. – Periodisches Spektralmuster (u, v):

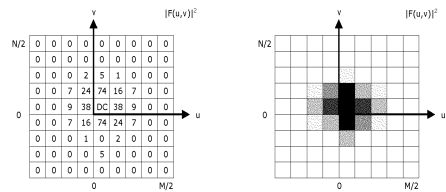
Fourieranalyse des periodisierten Bildmusters (zumeist via Diskrete Cosinus-Transformation) ergibt periodisches Spektralmuster. Jedes Matrixelement steht für eine Teilschwingung. Der jeweilige Betrag bedeutet deren Amplitude.

Punkt (0, 0) ist der Gleichwertkoeffizient (DC – Direct Current). Er errechnet sich als Mittelwert aller Helligkeitswerte des Abbilds im Ortsbereich. Die restlichen Werte (AC – Alternative Current) können als Schwankungen um den DC-Wert interpretiert werden. Punkte nahe bei DC stehen für niedrige Bildfrequenzen, während weiter entfernte Punkte für hohe Bildfrequenzen stehen



4. – Frequenzbereich:

Das Spektralmuster kann durch die inverse Fourier-Transformation (inv. DCT) in den Ortsbereich zurücktransformiert werden.



Eigenschaften der 2D-Fourier-Transformation:

Operation im Ortsbereich:

- Translation
- Addition (Überlagerung) von Funktionen
- Multiplikation zweier Funktionen
- Faltung zweier Funktionen



Auswirkung auf Frequenzbereich:

- Phasenverschiebung (Spektrum gleich, nicht aber Transform.)
- Addition (Überlagerung) der Spektralmuster
- Faltung zweier Funktionen
- Multiplikation zweier Funktionen

Digitale Filtermethoden

Filterung im Ortsbereich:

Direkte Beeinflussung der Ortsfunktion, etwa durch Methoden des gleitenden Durchschnitts mit Gewichtung (linear).

Prinzip in 1D: $x_i = \dots + x_{i-1} \cdot f_{n-1} + x_i \cdot f_n + x_{i+1} \cdot f_{n+1} + \dots$ x_i : Werte der Ortsfunktion f_n : wählbare Gewichtungsfaktoren
Geeignete Gewichtungsfaktorenwahl f_n ermöglicht Filteroperationen wie Glättung oder Kantenverstärkung.

Prinzip Faltung: Entspricht einer Modulation eines Signals (Bild) mit einem anderen Signal (Faltungsmaske).
Konkret: Anwendung obigen Prinzips in 2D via Filtermatrix (Matrix mit wählbaren Filterkoeffizienten)

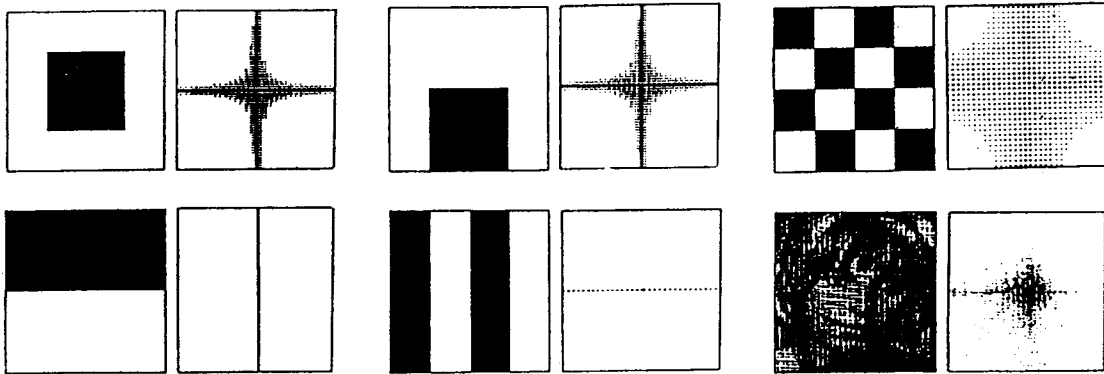
Filterung im Frequenzbereich:

Im Spektralbereich können bestimmte Frequenzen durch Veränderung der Matrix-Koeffizienten einfach beeinflusst werden.

Allgemein: $F'(u, v) = S(u, v) \cdot F(u, v)$ $S(u, v)$: Übertragungsfunktion

- *Tiefpassfilter*: Unterdrückung von Teilschwingungen hoher Frequenz (von DC entfernte Koeffizienten):
→ *Glättung*: Übergänge werden sanfter zum Preis von Detailschärfe.
- *Hochpassfilter*: Unterdrückung von Teilschwingungen niedriger Frequenz (Koeffizienten nahe an DC)
→ *Schärfung*: Kanten werden betont. Relativer Rauschanteil (→ hohe Frequenzen) steigt.
- *Bandpassfilter*: Unterdrückung von Teilschwingungen oberhalb und unterhalb eines spezifizierten Frequenzbands

Anhang: Beispiele von Bild und Spektrum



Abbildungsquellen:

Skizze zu Signalwandlung: Skript "Wearable Systems I", Prof. Tröster und Dr. Lukowicz, ETHZ, WS01/02
Restliche Skizzen: Skript "Multimediale Systeme", Prof. Dr. Stucki, UNIZH, SS02