

# KV Multimediale Systeme (VL 375, SS2002)

Philip Schoch, 98-721-210, philip@mydiac.ch

## Aufgabe: A-50 Ortsbereich-Frequenzbereich Transformation

### a) Fast Fourier Transform (FFT)

Die FFT ist ein Algorithmus, der die Berechnung der Diskreten Fourier Transformation (DFT) stark vereinfacht und dadurch den Rechenaufwand erheblich reduziert. Bevor wir tiefer in die Beschreibung der FFT eingehen, vorerst noch eine kurze Einführung in die Fourier Transformation.

Die Fouriertransformation ist ein fundamentales Verfahren in der Signalverarbeitung. Durch die Fouriertransformation lassen sich Signale von der Darstellung im Ortsbereich in die Darstellung im Frequenzbereich überführen und wieder zurück. Viele Operationen, wie z.B. Filter, lassen sich im Frequenzraum leichter und effizienter durchführen.

Die Durchführung der Transformation besteht aus mehreren Schritten, die in folgender Abbildung Abb.1 dargestellt sind.

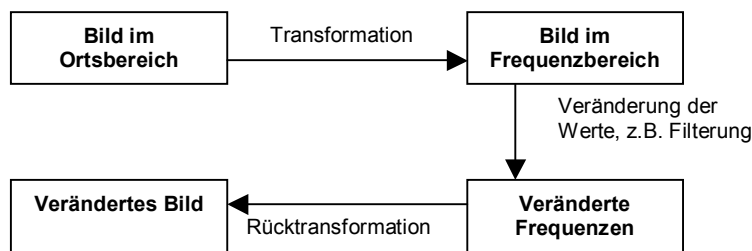


Abb.1

Die Fourier-Transformation, häufig auch als *Spektrum* bezeichnet, ist für ein- und zweidimensionale Funktionen definiert. Für den zweidimensionalen Fall der Diskreten Fourier-Transformation (DFT) gilt:

$$F(u,v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-i2\pi(ux+vy)/N} \quad i = \sqrt{-1} \quad (a)$$

Neben der Reduzierung des Rechenaufwandes durch die Anwendung der Fast Fourier-Transformation zeigen sich weitere Vorteile in der Verringerung der Rundungsfehler, die bei der Zwischenrechnung entstehen.

Ist  $N$  die Grösse der zu berechnenden DFT, so ergibt sich für die FFT ein Rechenaufwand der proportional zu  $N \ln N$  ist. Bei der normalen DFT ergibt sich im Gegensatz dazu ein Rechenaufwand proportional zu  $N^2$ .

In Tabelle Tab.1 sind die Berechnungszeiten der direkten und der FFT gegenübergestellt. Daraus wird die immense Leistungs- und Zeiteinsparung der schnellen Transformation ersichtlich.

Direkte Berechnung	FFT
N	$N^2/N \ln N$
256	32
512	57
1024	102
2048	186
4096	341
8192	630

Tab.1

Die FFT nutzt Symmetrieeigenschaften aus und reduziert die Anzahl der erforderlichen Multiplikationen durch Anwendung einer speziellen Reihenfolge, so dass jeweils auf schon berechnete Zwischenergebnisse zurückgegriffen werden kann. Das Verfahren der FFT setzt voraus, dass die Anzahl der Punkte  $N$  eine Zweierpotenz ist.

Grundsätzlich funktioniert die FFT so, dass die Transformation der Länge  $N$  in zwei Transformationen der Länge  $N/2$  aufgeteilt wird. Somit kann eine Eingangsfolge  $x[n]$  der Länge  $N$  in die zwei Folgen  $x_1[n]$  und  $x_2[n]$  zerlegt werden.  $x_1[n]$  enthält alle geraden Punkte,  $x_2[n]$  alle Ungeraden. Die folgen lauten:

$$X_1(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1[n] e^{-jk(4\pi/N)n} \quad (1)$$

$$X_2(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2[n] e^{-jk(4\pi/N)n} \quad (2)$$

Die Summation der Terme für ungerade und gerade  $n$  ergibt  $x[n]$ :

$$X(k) = \frac{1}{N} (X_1(k) + e^{-jk(2\pi/N)} X_2(k)), 0 \leq k < N \quad (3)$$

$$W = \exp(-2\pi/N) \quad (4)$$

Dieses Prinzip der Zerlegung kann nun auf die schon zerlegten Folgen wieder angewendet werden, und dies solange die Anzahl der Samples durch zwei geteilt werden kann.

Dadurch fällt die Hälfte der Multiplikationen weg. Im Allgemeinen ergeben sich  $N \log_2 N$  komplexe Additionen und  $\frac{1}{2} N \log_2 N$  komplexe Multiplikationen. Die dadurch eingesparten Rechenschritte machen die FFT im Vergleich zur direkten Berechnung der Diskreten Fourier Transformation wesentlich schneller (siehe Zahlenbeispiel in Tabelle Tab.1).

## b) Idee von Cooley-Tukey

Erst ~150 Jahre nach der Entdeckung der Fourier-Transformation durch Jean-Baptiste Fourier hat sie den Weg in die digitale Welt gefunden. Dies geschah durch die Beschreibung eines Algorithmus zur Berechnung der DFT von Cooley und Tukey im Jahre 1965. Dank dieses Algorithmus, von dem es heute mehrere Formen gibt, kann man Transformationen in Bruchteilen von Sekunden berechnen.

Bei der Entwicklung der FFT nutzten Cooley und Tukey die Tatsache, dass sich bei der Berechnung der DFT viele Schritte einsparen lassen, und durch die Trennung von Realteil und Imaginärteil der Daten eine weitere Reduzierung der zu berechnenden Datenmenge ergibt.

Zur Veranschaulichung der Idee von Cooley-Tukey, die in die Entwicklung der FFT eingegangen ist, dient die Matrizenfaktorisierung von  $[W]$  ( $[W]$ , siehe Gl. 4).

Beispiel: Wenn  $N=2^L$ , dann kann  $[W]$  in  $L$  Matrizen faktorisiert werden:  $[W] = [W_1] [W_2] \dots [W_L]$ . Bei jeder Reihe jeder einzelner Matrize gibt es die Eigenschaft, dass sie nur zwei "Nicht-Null" Elemente enthält, nämlich 1 und  $w^k$ , somit kann jedes Element einer neuen Matrize durch eine *komplexe Multiplikation* und eine *komplexe Addition* berechnet werden.

In Betracht der Transformationsgleichung (a) führt diese Erkenntnis dazu, dass unter neuer Anordnung der Terme die Gleichung für verschiedene Werte dasselbe Ergebnis annimmt. Der Algorithmus, der darauf von Cooley und Tukey entworfen wurde stellt nach wie vor die Basis der FFT dar, obwohl es inzwischen mehrere Ergänzungen davon gibt.

Die Anwendungsgebiete von DFT liegen in der Entwicklung von Filtern für die Verbesserung von Abbildungen und in der Datenkomprimierung. In der Datenkomprimierung zeigt die Transformation ihre Güte, falls die meisten Werte für  $F(u, v)$  gleich Null sind. Dann lassen sich die ursprünglichen Werte nämlich aus weniger als  $N$  Werten wieder zurückgewinnen.