Ortsbereich f(x,y) und Frequenzbereich F(u,v) im Vergleich

1. Einführung:

Wir stehen heute an der Schwelle zu einem Zeitalter, das wesentlich durch die Informationstechnologie geprägt sein wird. Die Bearbeitung, Speicherung und Übertragung visueller und auditiver Information fällt hierbei eine Schlüsselrolle zu um die Integration von Informations- und Kommunikationsformen wie Sprache, Ton, Bild und Graphik in eine multimediale Einheit zu ermöglichen.
Wie eben angesprochen, durch diese neue Multimedia Welt wird es offensichtlich notwendig, die *Bearbeitung* dieser Daten zu ermöglichen. Bildtransformationen sind z.B. nützlich, um bestimmte Eigenschaften eines Bildes besser hervorzuheben. Solche Transformationen, die in einem so genannten „*Frequenzraum*" durchgeführt werden, spielen in der digitalen Bildverarbeitung eine wichtige Rolle und werden in vielen Bereichen, wie z.B. der Bildcodierung oder der Bildverbesserung eingesetzt.
Um diese Datenbearbeitung zu ermöglichen, greiffen Softwarepaket-Entwickler auf die Möglichkeit zurück, digitale Signale vom *Ortsbereich* (also wie wir z.B. gewohnt sind, ein Bild zu betrachten) in den Frequenzbereich zu transformieren. Dies ermöglicht, Eigenschaften eines Bildes besser darzustellen und dies zu bearbeiten. Es scheint mir hier wichtig zu sein, ganz kurz auf die Mathematik, die dies ermöglicht, einzugehen.

2. Die *Fouriertransformation* – das Prinzip

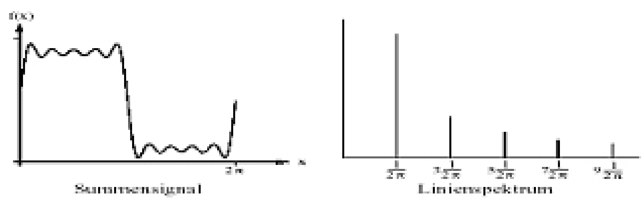
Den Übergang vom Ortsbereich in den Frequenzbereich erreicht man durch die Fouriertransformation. Die Fouriertransformation ist eine lineare Transformation, die eine Projektion des Signals vom Orts- (oder Zeit-) Bereich in den Frequenzbereich durchführt. Bei der Fourier-Transformation handelt es sich um einen globalen Operator, also um einen Operator der alle Pixel des Eingangsignals benötigt, um ein z.B. ein Pixel des Ausgangsbilds zu berechnen. Die 1-dimensionale Fourier-Transformation wird bei der Verarbeitung 1-dimensionaler Zeitsignale verwendet. Dabei werden die Zeitsignale aus dem Zeitbereich in den Frequenzbereich transformiert und als Frequenzspektrum dargestellt. Für die Verarbeitung von Bildern hingegen verwendet man die 2-dimensionale diskrete Fourier-Transformation (DFT), da Bilder digitale (diskrete) 2-dimensionale Ortsignale sind.

Als Beispiel: die 2-dimensionale Fouriertransformation:

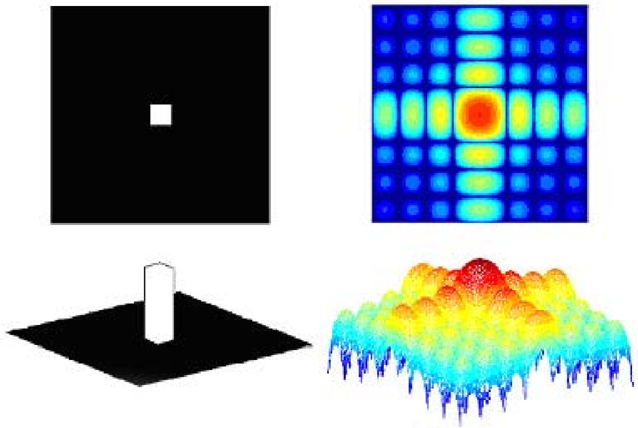
$$F(u,v) = \iint_{\infty} f(x,y)^{[-j2\pi(ux+vy)]} dxdy$$

$$f(x,y) = \iint F(u,v)^{[+j2\pi(xu+yv)]} dudv$$

Vergleich: Darstellung des Signals als Summensignal im Ortsbereich (links) und als Linienspektrum im Frequenzbereich (rechts).



3. Ortsbereich und Frequenzbereich: die Darstellung



Darstellung im Ortsbereich und im Frequenzbereich

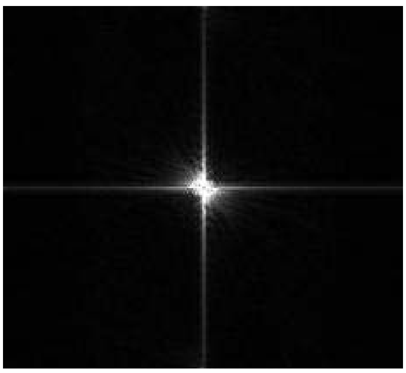
Bei der Darstellung eines Signals im Orts- und Frequenzbereich handelt es sich um die *identische Information*, abgeleitet aus dem gleichen Signal. Der Unterschied liegt im Blickwinkel, unter dem wir diese Information betrachten.
In Abhängigkeit vom Blickwinkel kann man *unterschiedliche Eigenschaften* des Signals erkennen. Wir sind daran gewohnt, Bilder im Ortsbereich anzusehen. Durch die visuelle Betrachtung der Bildinhalte im Frequenzbereich können wir jedoch andere Eigenschaften erkennen. Insbesondere sieht man, aus welchen Frequenzanteilen sich das Bild zusammensetzt.

4. Der Ortsbereich

Gesicht und seine Transformation in den Frequenzbereich (unten); hier: Originalbild

Wie gesagt, der Mensch ist gewohnt Bilder im Ortsbereich zu betrachten. Ein Bild stellt im Normalfall eine *zweidimensionale Funktion f(x,y)* dar. Dabei werden die Komponenten von F durch Farbe und Intensität in einer von x und y aufgespannten *Bildebene* sichtbar gemacht. Eine skalare Bildfunktion wird als Grauwertbild, eine zweiwertige Bildfunktion als Schwarzweissbild definiert. Bei Digitalbilder haben x und y diskrete Werte.
Die diskreten Bildwerte f(x,y) liegen für Grauwertbilder (wie im Beispiel links) zwischen 0 (dunkel) und der maximalen Messamplitude Q (hell). Für Q=255 lassen sich z.B. die diskreten Bildwerte durch $\log_2(Q+1) = 8$ Bit oder 1 Byte pro Pixel darstellen. Mit anderen Worten, die Schwarzintensität kann für ein Pixel 255 Gradierungen annehmen (also von Weiss bis Schwarz in 255 Stufen).

5. Der Frequenzbereich



Das Signal wird im *Frequenzbereich* als Zusammensetzung aus einzelnen Grundfrequenzen beschrieben. Die Koeffizienten zu den einzelnen Frequenzen sind die Amplituden, mit denen die Frequenzen im Signal vorkommen.
Für die Bildverarbeitung benützt man meist nur diesen Amplitudenanteil, obwohl man zur Rücktransformation in den Ortsbereich den Amplitudenanteil und den Phasenanteil benötigt.
Offensichtlich gibt das Amplitudenbild an, *wie stark die Frequenzen in einem Bild vertreten sind*. Die Betrachtung des Amplitudenbildes alleine erlaubt es, konkrete Aussagen über das Frequenzverhalten von Bildern zu machen. Der Phasenanteil beschreibt die relative Lage der Objekte zur Bildmitte.

Das Amplitudenspektrum eines reellen Bildes ist punktsymmetrisch zum Ursprung (u=0, v=0). Aus diesem Grunde wird bei der Darstellung des Spektrums der Ursprung in die Mitte des Bildes verschoben.
Die Amplituden der hohen Frequenzen sind am Rande des Bildes eingetragen, während die Amplituden der niedrigen Frequenzen im Inneren des Bildes zu finden sind.
Im Frequenzraum zeitlich verändernde Signale fragt man sich nach dessen Änderung:

- Wie stark variiert die Amplitude eines Signals?
- Wie stark variiert der Übergang von einem Pixelpunkt zum nächsten?
- Welche Frequenzen sind in dem gegebenen Signal vorhanden?

6. Schlussbemerkung

Der Vergleich zwischen Ortsbereich und Frequenzbereich ermöglicht es uns, Eigenschaften von Bild und Audio besser identifizieren zu können. Dadurch können digitale Daten nach bedarf analysiert, interpretiert, bearbeitet, komprimiert, verändert und gespeichert werden. Dies wird uns auch in Zukunft ermöglichen, eine verbesserte Integration von verschiedenen Kommunikationsformen in eine neue und extensive multimediale Einheit zu realisieren.